Lógica Difusa

Índice

[Conjunto Difuso 2](#_Toc139633434)

[Operações com conjuntos difusos 2](#_Toc139633435)

[Números Difusos 3](#_Toc139633436)

[Notação Alfa-Cut 4](#_Toc139633437)

[Computação com Palavras (Computing with Words – CW) 6](#_Toc139633438)

[Inferência Difusa 8](#_Toc139633439)

[Inferência de Mamdani 8](#_Toc139633440)

[COA 10](#_Toc139633441)

[Regra Composicional de Inferência 10](#_Toc139633442)

[Possibilidade e Lógica Difusa 12](#_Toc139633443)

[Possibilidade e Necessidade 12](#_Toc139633444)

[Variável Linguística Verdade 13](#_Toc139633445)

# Conjunto Difuso

Um conjunto a que cada elemento pode pertencer “não completamente” mas apenas “parcialmente”.

* O grau de pertença é expresso por um número ou por uma função **μ(x)**
* Varia entre 0 e 1

Formalmente:

* Se X é uma coleção de objetos denotados genericamente por x, um **conjunto difuso Ã** definido em X é um conjunto de pares ordenados da forma

 

* A função **μ** chama-se **Função de Pertença**
* Representa o grau de pertença do elemento x ao conjunto difuso

**Exemplo**

Conjunto de inteiros próximos de 1:



A Função de Pertença pode ser contínua:

* Neste caso o conjunto difuso representa-se na forma:



**Exemplo**

Conjuntos de reais próximos de 25:

(Portanto, se *x=25*, *μ=1*)

## Operações com conjuntos difusos

Segundo Zadeh:

* Interseção
  + **A**∩**B**

Elementos comuns a A e B sendo μ de cada um ***μA∩B = min(μA(x), μB(x))***

* Reunião
  + **A**∪**B**

Elementos comuns e não comuns a A e B sendo ***μA∪B = max(μA(x), μB(x))***

* Complementação
  + **/A**

Todos os elementos do **Universo** de A, sendo μ de cada um ***μ/A = 1-μA***

**Exemplos**

* Seja X o conjunto de modelos de casas possíveis, considerando o número de quartos de 1 a 10.
* Seja *μ(x)* a função de pertença de *Ã*, definida pela condição difusa "*a casa do tipo x é confortável para uma família de 4 pessoas*":

Ã = {(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)}

# Números Difusos

Um Número Difuso Ñ representa um **valor aproximado de N**, em que N se chama **Valor Médio**.

* A função de pertença de um número difuso tem apenas um máximo, e sempre de valor 1
* As funções de pertença normalmente utilizadas para números difusos são triangulares
* As trapezoidais usam-se para **Intervalos Difusos**

Uma imagem com diagrama, file, design

Descrição gerada automaticamente

**Exemplo**

*Fuzzy Number* (cerca de) 49:

~49 = {(x,μ~49(x)) | x ∈ , μ~49(x)}

### Notação Alfa-Cut

Aplicável **apenas a funções de pertença trapezoidais** (e triangulares) e simplifica muito os cálculos:

* Intervalo difuso
  + Representado por 4 abcissas (A, B, C e D) dos pontos em que μ=0, μ=1, μ=1 e μ=0 (trapézios).
  + Para um número difuso de forma triangular, B=C

Uma imagem com texto, file, diagrama, Gráfico

Descrição gerada automaticamente

#### Operações Aritméticas

Para intervalos crespos [a,b] e [c,d] os extremos dos intervalos resultantes são:

* **[a,b] + [c,d]** = [a+c, b+d]
* **[a,b] - [c,d]** = [a-d, b-c]
* **[a,b] \* [c,d]** = [min(ac, ad, bc, bd), max(ac, ad, bc, bd)]
* **[a,b] / [c,d]** = [a,b] \* [1/d, 1/c] = [min(a/d, a/c, b/d, b/c), max(a/d, a/c, b/d, b/c)]
* **α.[a,b]** = [αa, αb] se α>0

= [αb, αa] se α<0

Para efeitos de cálculo, um intervalo difuso pode ser encarado como definido pelos extremos de dois intervalos crespos:

Uma imagem com file, diagrama, Gráfico, ladeira

Descrição gerada automaticamente

Portanto, aplicando “duas vezes” as fórmulas anteriores, obtém-se:

1. Adição

(m0, m1, m2, m3) + (n0, n1, n2, n3) = (m0+n0, m1+n1, m2+n2, m3+n3)

Este processo repete-se para “*o intervalo interno [m1,m2]”*

*“o limite menor” menos “o limite maior” dá “o limite menor” ( o mais à esquerda)*

Simétrico para *“o limite maior”*

1. Subtração

(m0, m1, m2, m3) - (n0, n1, n2, n3) = (m0-n3, m1-n2, m2-n1, m3-n0)

1. Multiplicação

Na multiplicação nada se pode dizer acerca do resultado dos produtos. Portanto, *“os limites menores”* têm de recorrer ao ***min*** *...*

...e os “maiores” ao ***max***

(m0, m1, m2, m3) x (n0, n1, n2, n3) =

= (**min**(m0n0, m0n3, m3n0, m3n3), **min**(m1n1, m1n2, m2n1, m2n2),

**max**(m1n1, m1n2, m2n1, m2n2), **max**(m0n0, m0n3, m3n0, m3n3))

1. Divisão

(m0, m1, m2, m3) / (n0, n1, n2, n3) =

= (**min**(m0/n0, m0/n3, m3/n0, m3/n3), **min**(m1/n1, m1/n2, m2/n1, m2/n2), **max**(m1/n1, m1/n2, m2/n1, m2/n2), **max** (m0/n0, m0/n3, m3/n0, m3/n3))

A divisão obtém-se a partir da multiplicação

**Exemplo**

Adição e Subtração de 2 números difusos

**α-cut** (0,1,2,3) + (2,3,4,5) = (2,4,6,8) (0,1,2,3) - (2,3,4,5) = (-5,-3,-1,-2)

**LR** (1,2,1,1) + (3,4,1,1) = (4,6,2,2) (1,2,1,1) - (3,4,1,1) = (4,6,2,2)

Uma imagem com texto, file, diagrama, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

# Computação com Palavras (Computing with Words – CW)

Conjuntos difusos podem representar termos linguísticos:

* Basta atribuir um valor médio e uma difusão à tradução do “conceito” pretendido.

**Exemplo**

Velho: **Ñ(velho)** = {(u, μvelho(u)) | u ∈ [0,100]}

μvelho(u) = 0 se μ ∈ [0,50]

μvelho(u) =1 / (1+((u-50)/5)-2) se μ ∈ ]50,100]

Na aproximação por trapézios teríamos qualquer coisa deste tipo:

Uma imagem com file, Gráfico, diagrama, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

Neste exemplo a **Variável Linguística “idade”** foi adjetivada pelo termo **Alta** gerando o termo **Velho**.

Deste modo um vocabulário pode ser associado a qualquer variável linguística:

* Cada termo linguístico é uma **graduação da variável**
* Cada termo linguístico é representado por um **conjunto difuso**

**Exemplo**

Seja a variável profissão classificada em função do rendimento que gera. Poderia ser:

Uma imagem com texto, file, diagrama, Gráfico

Descrição gerada automaticamente

Numa escala unitária, de modo semelhante, podem também representar-se:

* Quantificadores
  + Todos, quase todos, alguns, nenhuns
* Qualificadores de Frequência
  + Sempre, Por vezes, Nunca
* Modificadores (hedge modifiers)
  + Muito
    - Normalmente traduzido para a função condensação, que eleva ao quadrado a função μ do termo original

**Muito(velho)** = {(u, μ **2**velho(u)) | u ∈ [0,100]}

μvelho(u) = 0 se μ ∈ [0,50]

μvelho(u) =1 / (1+((u-50)/5)-2)**2** se μ ∈ ]50,100]

* + Aproximadamente ou Cerca de
    - Normalmente traduzido pela função dilatação, que calcula a raiz da função do termo original

**Aproximadamente(velho)** = {(u, μ **1/2**velho(u)) | u ∈ [0,100]}

μvelho(u) = 0 se μ ∈ [0,50]

μvelho(u) =1 / (1+((u-50)/5)-2)**1/2** se μ ∈ ]50,100]

# Inferência Difusa

Casos a analisar

* Inferência de Mamdani
* Regra Composicional de Inferência, de Zadeh

Permitem obter conclusões com um *grau de verdade* variável, em função dos graus de verdade da premissa.

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

Note-se que:

* A semântica “quanto o rendimento é baixo” é a mesma de “quanto é verdadeiro que o rendimento é baixo”
* A semântica “quanto o débito é alto” é a mesma de “quanto é verdadeiro que o débito seja alto”
* A semântica “quanto o risco é grande” é a mesma de “quanto é verdadeiro que o risco seja grande”

## Inferência de Mamdani

Num sistema de controlo os sinais de erro, numéricos, representam uma diferença entre o objetivo pretendido e a saída atual:

1. Para realizar as inferências com base em termos linguísticos, os sinais de erro são transformados em termos linguísticos
2. Realiza-se uma inferência para cada regra IF...THEN
3. O resultado de cada uma tem de ser combinado num único conjunto difuso
4. Esse conjunto difuso tem de ser transformado num valor numérico para aplicação dos atuadores

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, diagrama

Descrição gerada automaticamente

Na inferência segundo Mamdani, o **μ** da **conclusão** obtém-se cortando o **termo linguístico do consequente** pelo valor de **μ** do **antecedente**.

* Se houver mais que 1 antecedente (ligados pelo operador E) determina-se o mínimo desses **μ**

**Exemplo**

Num sistema de controlo de velocidade de um motor, suponhamos que 200 r.p.m. corresponde a um *erro positivo baixo* e que a regra é:

Uma imagem com texto, file, diagrama, captura de ecrã

Descrição gerada automaticamente

**Exemplo: Inferência de Mandani num Fuzzy ES**

Suponhamos um ES destinado a calcular o limite de crédito a conceder a um cliente de um banco.

Sejam 4 regras:

1. **SE** o candidato é novo **E** o rendimento é baixo **ENTÃO** o crédito é baixo

2. **SE** o candidato tem outros créditos, **ENTÃO** o crédito é baixo

3. **SE** o candidato tem bens próprios, **ENTÃO** o crédito é alto

4. **SE** o candidato sofre de doença crónica, **ENTÃO** o crédito é médio

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, número

Descrição gerada automaticamenteUma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com file, diagrama, Gráfico, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

Para determinar o crédito a conceder, estas conclusões têm de ser combinadas num só número crespo final. Isto é a **Desfuzzificação**.

### COA (Center of Area ou Centróide)

Consiste em determinar a abcissa do baricentro.

As dimensões dos resultados são $ e portanto representa o valor do crédito a conceder.

Uma imagem com texto, Tipo de letra, file, captura de ecrã

Descrição gerada automaticamente

* Uma imagem com file, diagrama, Gráfico

  Descrição gerada automaticamenteNeste caso pretendemos o **centro de gravidade** da figura delimitada pelo azul-claro, que representa a conclusão das regras 1 a 4.
* Este centro de gravidade é uma abcissa x
  + Ela representa o valor do crédito a conceder.
* Note-se que, como Alto possui maior massa (tem valores de μ mais altos) é de esperar que o COA obtido se situe acima do ponto médio (1000)

Como os trapézios são simétricos e o corte superior é plano, podemos calcular uma aproximação de COA designada por **Weighted Average**. Para cada trapézio tem-se:



E depois combinam-se os valore assim obtidos:

Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, file

Descrição gerada automaticamente

## Regra Composicional de Inferência

Baseia-se em Relações Difusas, sejam as seguintes relações:

* Relação Crespa “X é casado com Y”

Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, file

Descrição gerada automaticamente

* Relação Difusa “X é muito maior que Y”

Uma imagem com texto, Tipo de letra, número, captura de ecrã

Descrição gerada automaticamente

Uma relação difusa pode ser dada por uma tabela ou por uma função:

* **Exemplo**
  + A seguinte função pode traduzir uma relação *“x é bastante maior que y”*

μ~R(x,y) =

A RCI permite efetuar inferências a partir de duas relações difusas, recorrendo à operação de composição de relações. Cada inferência equivale a um *Modus Ponens Generalizado:*

Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, file

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

# Possibilidade e Lógica Difusa

## Possibilidade e Necessidade

Possibilidade: uma forma de incerteza que exprime uma avaliação subjetiva de certa questão.

**Exemplos**

1. Uma pessoa é “nova” ou “velha” mas não se sabe exatamente a sua idade
2. Um formo está “quente” ou “frio” mas não se sabe exatamente a sua temperatura
3. Num semáforo:
   1. A probabilidade de verde, amarelo e vermelho é p.e. 5/10, 1/10 e 4/10
   2. A possibilidade de verde, amarelo ou vermelho é 1 (para qualquer das cores) porque se sabe que é “completamente possível” que a cor visível seja uma destas

Uma imagem com texto, Tipo de letra, captura de ecrã, file

Descrição gerada automaticamente

Uma imagem com texto, captura de ecrã, Tipo de letra, file

Descrição gerada automaticamente

A necessidade, N, está intimamente relacionada com a possibilidade:



* Possibilidade e Necessidade são Medidas Difusas
* A necessidade é “mais exigente” e restritiva no sentido em que mede quão necessariamente um facto é possível, em função de outro conhecido.
* N=1 indica que um facto é “necessariamente verdadeiro”

## Variável Linguística Verdade

De todas as variáveis linguísticas, assume particular importância: a variável Verdade

Admitindo graduações desta variável *(completamente falso, falso ... pouco verdadeiro, verdadeiro, completamente verdadeiro)* diferencia-se claramente a logica clássica da logica difusa:

* Agora há graus de verdade expressos por termos linguísticos que são representáveis por conjuntos difusos

Uma imagem com texto, file, captura de ecrã, diagrama

Descrição gerada automaticamente